23. kapitola – Definiční obory

Téma definičních oborů by se možná spíše hodilo až za exponenciální rovnice, logaritmy a goniometrii. Nicméně v drtivé většině úloh se okamžitě přesuneme k nerovnicím, a proto tuto látku vsunu na toto místo.

V testech u přijímacích zkoušek nás budou čekat tyto tři základní funkce, jejichž definiční obor budeme určovat:

Funkce $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ $\rightarrow$ Definiční obor: $x \neq 0$

Funkce $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ $\rightarrow$ Definiční obor: $x \geq 0$

Funkce $f\left(x\right)=\log_a x$ $\rightarrow$ Definiční obor: $x > 0$

Jednoduše, to, čím dělíme, nesmí být nula. To, co odmocňujeme, nesmí být záporné, může to být nula. To, co logaritmujeme, musí být kladné, nesmí to být nula.

Někdy nás potká kombinace těchto funkcí v podobě:

Funkce $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\rightarrow$ Potom je definiční obor jako u logaritmu: $x > 0$

1. Urči $D(f)$ funkce $f(x)$: $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(|x-2|+|x|-6\right)$.

Argument musí být větší než nula $\Rightarrow$ $|x-2|+|x|-6>0$

$x_{01}=0,\ x_{02}=2$

		0		2	
$x-2$	$-$		$-$		$+$
x	$-$		$+$		$+$

a) $x \in (-\infty, 0)$

$$\left(-x+2\right)+\left(-x\right)-6>0$$
$$-x+2-x-6>0$$
$$-2x>4 \quad /:\left(-2\right)$$
$$x<-2 \text{ !!}$$
$$P_a=\left(-\infty,-2\right)$$

b) $x \in \left\langle 0,2 \right\rangle$

$$-x+2+x-6>0$$
$$-4>0$$
$$P_b=\emptyset$$

c) $x \in (2, \infty)$

$$x-2+x-6>0$$
$$2x>8 \quad /:\left(-2\right)$$
$$x>4$$
$$P_c=\left(4,\infty\right)$$

$P=(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$

2. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f\left(x\right)=\log\left(\left|2x+4\right|-\left|6-2x\right|-3\right)$. Jaké množině je roven definiční obor této funkce?

$f\left(x\right)=\log_a x \ldots x>0$

$\left|2x+4\right|-\left|6-2x\right|-3>0$

	a	-2	b	3	c
$2x+4$	$-$		$+$		$+$
$6-2x$	$+$		$+$		$-$

a) $x\in\left(-\infty,-2\right)$

$$-2x-4-6+2x-3>0$$
$$-13>0$$

$$P_a=\emptyset$$

b) $x\left\langle -2,3\right\rangle$

$$2x+4-6+2x-3>0$$
$$4x>5$$
$$x>\frac{5}{4}$$

$$P_b=\left(\frac{5}{4},3\right\rangle$$

c) $x\in\left(3,+\infty\right)$

$$2x+4+6-2x-3>0$$
$$7>0$$

$$P_c=\left(3,+\infty\right)$$

$$\underline{\underline{P=\left(\frac{5}{4},+\infty\right)}}$$

3. Urči definiční obor funkce $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{\log_7\left(9-3x\right)}{-7-x^2}}$.

Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule. Pod odmocninou je zlomek, jehož jmenovatel je jednoznačně záporný. Čitatel musí být tedy záporný nebo roven nule. Logaritmovaný výraz musí být větší než nula.

$\log_7\left(9-3x\right)\leq 0 \ \rightarrow\ \log_7\left(9-3x\right)\leq\log_7 1 \ \rightarrow 9-3x\leq 1 \ \rightarrow 3x\geq 8 \ \rightarrow x\geq\frac{8}{3} \ \rightarrow x\in\left\langle\frac{8}{3},\infty\right)$

Podmínka: $9-3x>0 \ \rightarrow\ x<3$ Konečný výsledek: $x\in\left\langle\frac{8}{3},3\right)$

Platí: Jsou-li základy větší než 1, znak nerovnosti se nemění.

4. Urči definiční obor funkce $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{\log_3\left(5-x\right)}{-9x^2-3}}$.

$\log_3\left(5-x\right)\leq 0 \ \rightarrow\ \log_3\left(5-x\right)\leq\log_3 1 \ \rightarrow 5-x\leq 1 \ \rightarrow x\geq 4 \ \rightarrow x\in\left\langle 4,\infty\right)$

Podmínka: $5-x>0 \ \rightarrow\ x<5$ Konečný výsledek: $x\in\left\langle 4,5\right)$

5. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem
$f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\left|2x+4\right|-\left|2x-6\right|-3}}$. Určete její definiční obor.

$\left|2x+4\right|-\left|2x-6\right|-3>0$ Nulové body: $x_{01}=-2,\ x_{02}=3$

		-2		3	
$2x+4$	$-$		$+$		$+$
$2x-6$	$-$		$-$		$+$

a) $\underline{x\in\left(-\infty,-2\right)}$

$-2x-4+2x-6-3>0$

$-13>0$

$P_a=\varnothing$

b) $\underline{x\in\left\langle -2,3\right\rangle}$

$2x+4+2x-6-3>0$

$4x-5>0$

$x>\dfrac{5}{4}$

$P_b=\left(\dfrac{5}{4},3\right\rangle$

c) $\underline{x\in\left(3,+\infty\right)}$

$2x+4-2x+6-3>0$

$7>0$

$P_c=\left(3,+\infty\right)$

$\underline{\underline{P=\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)}}$

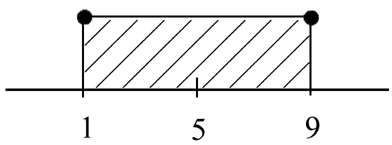
6. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f\left(x\right)=\sqrt{4-\left|x^2-5\right|}$. Určete její definiční obor.

$4-\left|x^2-5\right|\geq 0$ substituce: $x^2=y$

$4-\left|y-5\right|\geq 0$

$-\left|y-5\right|\geq -4$

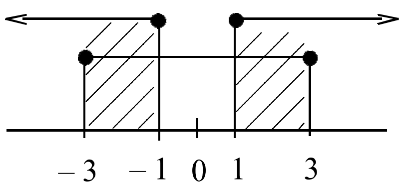
$\left|y-5\right|\leq 4$



$1\leq y\leq 9$

$1\leq x^2\leq 9$

$1\leq\left|x\right|\leq 3$



$\underline{\underline{P=\left\langle -3,-1\right\rangle\cup\left\langle 1,3\right\rangle}}$

7. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f(x) = \log\left(|2x-6| - |2x+4| + 3\right)$. Určete její definiční obor.

$$|2x-6| - |2x+4| + 3 > 0$$

Nulové body: $x_{01} = -2, x_{02} = 3$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$2x+4$	$-$		$+$		$+$
$2x-6$	$-$		$-$		$+$

a) $x \in (-\infty, -2)$

$$-2x+6+2x+4+3 > 0$$
$$13 > 0$$
$$P_a = (-\infty, -2)$$

b) $x \in \langle -2, 3 \rangle$

$$-2x+6-2x-4+3 > 0$$
$$-4x > -5$$
$$x < \frac{5}{4}$$
$$P_b = \left\langle -2, \frac{5}{4} \right)$$

c) $x \in (3, +\infty)$

$$2x-6-2x-4+3 > 0$$
$$-7 > 0$$
$$P_c = \emptyset$$

$$P = \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$$

8. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f(x) = \sqrt{1 - \log_{11} x}$. Určete její definiční obor.

Podmínka: $x > 0$

$$1 - \log_{11} x \geq 0$$
$$-\log_{11} x \geq -1$$
$$\log_{11} x \leq 1$$
$$\log_{11} x \leq \log_{11} 11 \quad \rightarrow \quad x \leq 11$$
$$P = (0, 11\rangle$$

9. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f(x) = \log(x+9) + \sqrt{x^2 - 25}$. Určete její definiční obor.

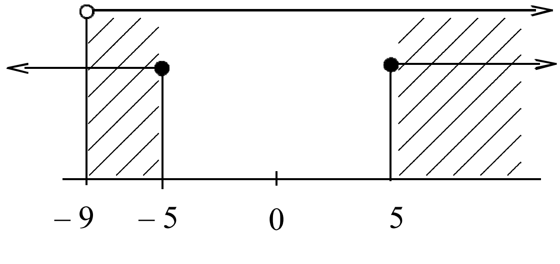
a) $x + 9 > 0$

$x > -9$

b) $x^2 - 25 \geq 0$

$x^2 \geq 25$

$|x| \geq 5$

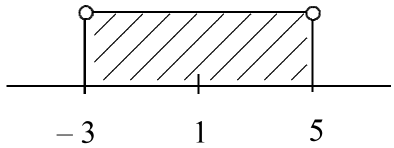


$$P = (-9, -5\rangle \cup \langle 5, +\infty)$$

10. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem
$f(x) = \log\left(\frac{4-|x-1|}{4x^2+3}\right)$. Určete její definiční obor.

$\frac{4-|x-1|}{4x^2+3} > 0$ … $4x^2 + 3$ je vždy kladné

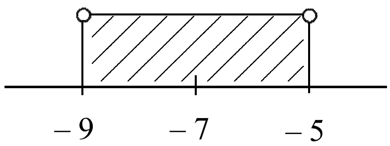
$$4-|x-1| > 0$$
$$-|x-1| > -4$$
$$|x-1| < 4$$



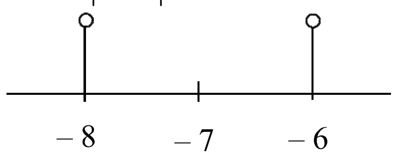
$\underline{\underline{P = (-3,5)}}$

11. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem
$f(x) = \frac{1}{\log(2-|x+7|)}$. Určete její definiční obor.

a)
$$2-|x+7| > 0$$
$$|x+7| < 2$$



b)
$$\log(2-|x+7|) \neq 0$$
$$2-|x+7| \neq 1$$
$$|x+7| \neq 1$$



$\underline{\underline{P = (-9,-8) \cup (-8,-6) \cup (-6,-5)}}$

12. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Určete její definiční obor.

$1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 1 \leq 0;$ nulové hodnoty $x_1 = -1;\ x_2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \langle -1,1 \rangle$

Pod odmocninou musí být číslo větší nebo rovno nule. U kvadratické nerovnice si můžeme pomoci grafem.

13. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f\left(x\right)=\sqrt{6x+7-x^2}$. Určete její definiční obor.

$6x+7-x^2\geq 0\rightarrow x^2-6x-7\leq 0;$ nulové hodnoty $x_1=-1;\ x_2=7\quad\rightarrow\quad x=\left\langle -1,7\right\rangle$
Pod odmocninou musí být číslo větší nebo rovno nule. U kvadratické nerovnice si můžeme pomoci grafem.

14. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f\left(x\right)=\log\left(x^2+4x-5\right)$. Určete její definiční obor.

$x^2+4x-5>0;$ nulové hodnoty $x_1=-5;\ x_2=1\quad\rightarrow\quad x=\left(-\infty,-5\right)\cup\left(1,\infty\right)$
Logaritmovaná funkce musí být větší než nula. U kvadratické nerovnice si můžeme pomoci grafem.

15. Uvažujeme reálnou funkci *f* jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f\left(x\right)=\log(8x-7-x^2)$. Určete její definiční obor.

$8x-7-x^2>0\rightarrow x^2-8x+7<0;$ nulové hodnoty $x_1=1;\ x_2=7\quad\rightarrow\quad x=\left(1,7\right)$
Logaritmovaná funkce musí být větší než nula. U kvadratické nerovnice si můžeme pomoci grafem.

16. Urči definiční obor funkce $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\left|1-2x\right|-\left|x+1\right|-3}}$.

Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule. Odmocnina je ve jmenovateli zlomku, výraz pod odmocninou nesmí být ani roven nule. Musí tedy platit: $\left|1-2x\right|-\left|x+1\right|-3>0$

Nalezneme nulové body a znaménka výrazů z absolutních hodnot na třech intervalech:

	$\left(-\infty;-1\right)$	$\left\langle -1;\frac{1}{2}\right\rangle$	$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$
$1-2x$	$+$	$+$	$-$
$x+1$	$-$	$+$	$+$

Provedeme řešení na dílčích intervalech:

$\left(-\infty;-1\right)$	$\left\langle -1;\frac{1}{2}\right\rangle$	$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$
$1-2x+x+1-3>0$ $-x>1$ $x<-1$	$1-2x-x-1-3>0$ $-3x>3$ $x<-1$	$2x-1-x-1-3>0$ $x>5$
$x\in\left(-\infty;-1\right)$	$x\in\varnothing$	$x\in\left(5,\infty\right)$
Konečný výsledek: $x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(5,\infty\right)$		