BINOMICKÁ VĚTA

1.1. Vypočti: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)^5$.

ŘEŠENÍ:

$$\binom{5}{0}\left(\sqrt{3}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\sqrt{3}\right)^4\cdot\sqrt{2}i+\binom{5}{2}\left(\sqrt{3}\right)^3\cdot\left(\sqrt{2}i\right)^2+$$

$$+\binom{5}{3}\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}i\right)^3+\binom{5}{4}\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}i\right)^4+\binom{5}{5}\left(\sqrt{2}i\right)^5=$$

$$1\cdot 9\cdot\sqrt{3}+5\cdot 9\cdot\sqrt{2}i+10\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2i^2+10\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}i^3+$$

$$+5\cdot\sqrt{3}\cdot 4i^4+1\cdot 4\sqrt{2}i^5=$$

$$=9\sqrt{3}+45\sqrt{2}i-60\sqrt{3}-60\sqrt{2}i+20\sqrt{3}+4\sqrt{2}i=$$

$$=-31\sqrt{3}-11\sqrt{2}i$$

Binomická věta:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\ldots$$

$$+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n$$

Koeficienty členů se snadno určí z Pascalova trojúhelníku:

n	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

1.2. Pro které číslo x je sedmý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $\left[\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3}\right]^{10}$ pomocí binomické věty, roven číslu $\frac{21}{10}$?

ŘEŠENÍ:

POZOR!!! – pro 7. člen je hodnota $k = 6$

$$7.\text{ člen} \ldots \binom{10}{6}\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)^4\left(-\frac{1}{3}\right)^6=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot\frac{81}{16x^2}\cdot\frac{1}{729}=\frac{35}{24x^2}$$

$$\frac{35}{24x^2}=\frac{21}{10}\Rightarrow x^2=\frac{35\cdot 10}{21\cdot 24}=\frac{25}{36}\Rightarrow x=\pm\frac{5}{6}$$

Z podmínky: $x>0\Rightarrow x=\frac{5}{6}$

Použijeme vztah pro průběžný (k + 1)-ní člen rozvoje:

Pro $(a+b)^n$ má tvar $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Pro $(a-b)^n$ má tvar $(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Jelikož je x pod odmocninou, neuvažujeme možnost $x=-\frac{5}{6}$.

1.3. V binomickém rozvoji $\left[\frac{\sqrt[4]{x}}{8}-\frac{4}{x}\right]^{12}$ urči člen, který obsahuje x^{-7}. Vypočti tento člen.

ŘEŠENÍ:	Nejprve určíme obecný člen.
$(-1)^k\binom{12}{k}\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{8}\right)^{12-k}\left(\frac{4}{x}\right)^k$	Hledáme takové k, pro které mocnina x vychází –7.
$\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{8}\right)^{12-k}\left(\frac{4}{x}\right)^k=\left(\frac{1}{8}\right)^{12-k}\cdot x^{\frac{12-k}{4}}\cdot 4^k\cdot x^{-k}=\left(\frac{1}{8}\right)^{12-k}\cdot 4^k\cdot x^{\frac{12-k}{4}-k}=$ $=\left(\frac{1}{8}\right)^{12-k}\cdot 4^k\cdot x^{\frac{12-k-4k}{4}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{12-k}\cdot 4^k\cdot x^{\frac{12-5k}{4}}$	Nalezené k dosadíme do vzorce pro obecný člen.
$\frac{12-5k}{4}=-7\Rightarrow 5k=40\Rightarrow k=8$	
$(-1)^8\binom{12}{8}\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{8}\right)^4\left(\frac{4}{x}\right)^8=(-495)\frac{x}{4096}\left(\frac{65536}{x^8}\right)=-7920x^{-7}$	

1.4. V binomickém rozvoji $\left[x\sqrt{x}-\frac{1}{x^4}\right]^n$ je součet prvních tří koeficientů 67. Urči z této podmínky n a absolutní člen rozvoje.

ŘEŠENÍ:	Sestavíme rovnici pro první tři koeficienty. Odtud zjistíme hodnotu exponentu n.
$\binom{n}{0}=1,\binom{n}{1}=n,\binom{n}{2}=\frac{n.(n-1)}{2}$	
$1+n+\frac{n.(n-1)}{2}=67\Rightarrow n^2+n-132=0\Rightarrow n_{1,2}=\frac{-1\pm 23}{2}\Rightarrow n_1=\cancel{-12};n_2=11$	Hledáme absolutní člen, to je člen neobsahující x (chcete-li, člen obsahující x^0). Hledáme u obecného členu takové k, pro které se x navzájem vykrátí.
$(-1)^k\binom{11}{k}\left(x\sqrt{x}\right)^{11-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k$	
$\left(x\sqrt{x}\right)^{11-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k=x^{\frac{3}{2}(11-k)}.x^{-4k}=x^{\frac{33-3k-8k}{2}}=x^{\frac{33-11k}{2}}$	
$\frac{33-11k}{2}=0\Rightarrow 11k=33\Rightarrow k=3$	Dopočítáme celý člen pro vypočítané k.
$(-1)^3\binom{11}{3}\left(x\sqrt{x}\right)^8\left(\frac{1}{x^4}\right)^3=-165\frac{x^{12}}{x^{12}}=-165$	

1.5. Urči desátý člen binomického rozvoje mocniny $\left[\frac{\sqrt{x}}{x}+\sqrt[3]{x}\right]^{15}$.

ŘEŠENÍ:

$$k=9\Rightarrow\binom{15}{9}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)^{6}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{9}=\binom{15}{9}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{6}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{9}=$$

$$=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}\cdot x^{-3+3}=5005$$

Dosadíme do vzorce pro průběžný člen binomického rozvoje.

1.6. V binomickém rozvoji výrazu $\left[x\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right]^{n}$ *urči koeficient absolutního členu, je-li* $n<10$.

ŘEŠENÍ:

$$\left(x\sqrt{x}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^{k}=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{n-k}\cdot\left(x^{-2}\right)^{k}=x^{\frac{3}{2}n-\frac{7}{2}k}$$

$$\frac{3}{2}n-\frac{7}{2}k=0\Rightarrow k=\frac{3}{7}n\Rightarrow n=7,k=3$$

$$\binom{7}{3}\left(x\sqrt{x}\right)^{4}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2}x^{6}\cdot\frac{1}{x^{6}}=35$$

Vyjádříme obecný člen rozvoje bez kombinačního čísla, které k vlastnímu výpočtu nepotřebujeme. Exponent u x položíme rovnu nule. Získáme vztah mezi k a n. Potřebujeme najít takové hodnoty, aby k i n vycházely celočíselně. To zajišťuje hodnota n rovna násobku čísla 7. Z podmínky pro n vychází n = 7 a k = 3.

1.7. Užitím binomické věty vypočti: $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6}$.

1.8. Kolikátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(3u^{2}+\frac{v}{2}\right)^{6}$ *vychází* $729u^{10}v$?

1.9. Kolikátý člen v binomickém rozvoji výrazu $\left(10z^{3}-\frac{\sqrt{5}}{z}\right)^{12}$ *neobsahuje z?*

ŘEŠENÍ:

7. 1, **8. druhý člen** **9. desátý člen**

Otázky, které mohou padnout při maturitní zkoušce:

1) **Napiš vzorce** $(a\pm b)^{2},(a\pm b)^{3},(a\pm b)^{4}$.

2) **Napiš binomickou větu.**

3) **Napiš vztah pro *k*-tý člen binomického rozvoje.**