GONIOMETRICKÉ ROVNICE - UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH VZORCŮ

1.1. Řeš v R rovnici: $3\cos^2 x = \sin^2 x$

ŘEŠENÍ:

$$3\cos^2 x = \sin^2 x$$
$$3\cos^2 x = 1-\cos^2 x$$
$$4\cos^2 x = 1$$
$$\cos x = \pm\frac{1}{2}$$
$$x_{1k} = \frac{\pi}{3}+2k\pi, x_{2k} = \frac{2\pi}{3}+2k\pi, x_{3k} = \frac{4\pi}{3}+2k\pi, x_{4k} = \frac{5\pi}{3}+2k\pi$$
$$\mathrm{K} = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi; \frac{2\pi}{3}+k\pi\right\}$$

Při řešení náročnějších goniometrických rovnic využíváme hlavně tyto vztahy:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\mathrm{cotg}\, x}$$

Rovnici, kde se vyskytuje více goniometrických funkcí, převádíme na rovnici s jednou goniometrickou funkcí. Naším cílem je jednoduchá goniometrická rovnice.

1.2. Řeš v R rovnici: $\sqrt{3}\left(\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{\mathrm{cotg}\, x}\right) = 3\cdot(\mathrm{tg}\, x - 1)$

ŘEŠENÍ:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x = 3\,\mathrm{tg}\, x - 3$$
$$\sqrt{3}y^2 + \left(-\sqrt{3}-3\right)y + 3 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{3}+3\pm\sqrt{9+6\sqrt{3}+3-12\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3\pm\sqrt{9-6\sqrt{3}+3}}{2\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}+3\pm\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3\pm\left(3-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$$
$$y_1 = \frac{\sqrt{3}+3-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$$
$$y_2 == \frac{\sqrt{3}+3+3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$
$$\text{a)}\ \mathrm{tg}\, x = 1 \Rightarrow x_{1k} = \frac{\pi}{4}+k\pi; \quad \text{b)}\ \mathrm{tg}\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x_{2k} = \frac{\pi}{3}+k\pi$$
$$\mathrm{K} = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{3}+k\pi\right\}$$

Pomocí vztahu mezi $\mathrm{tg}\, x$ a $\mathrm{cotg}\, x$ upravíme rovnici tak, aby se v ní vyskytovala jen jedna funkce.

Pozor! Zde je velmi náročná práce v diskriminantu. Na první pohled vidíme, že výraz nejde jednoduše odmocnit a tak se rozhodneme o pokus najít pod odmocninou druhou mocninu rozdílu.

1.3. Řeš v R rovnici: $\operatorname{cotg} 2x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 2x}$

ŘEŠENÍ:

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + 1 = \frac{1}{\sin^2 2x} \qquad / \cdot \sin^2 2x$$

$$\sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x = 1$$

$$\sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x = \sin^2 2x + \cos^2 2x$$

$$\sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 0$$

$$\cos 2x (\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

a) $\cos 2x = 0$

$$2x_{1k} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_{1k} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

b) $\sin 2x = \cos 2x \quad /:\cos 2x$

$$\operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x_{2k} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x_{2k} = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\mathrm{K} = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

V rovnici se pokusíme co nejrychleji odstranit zlomky vynásobením a postupně rovnici dovedeme do součinového tvaru s nulou na pravé straně.

Taky si můžeš zjednodušit výpočet zavedením substituce $y = 2x$, i když zde to není zas tak nutné.

Povšimni si práce se závorkou. Rozdíl nebo součet funkcí sinus a kosinus řešíme většinou vydělením a převodem na rovnici s funkcí tangens. Hodnota funkcí sinus a kosinus nemůže být současně nula. Rovnici můžeme bez obav dělit a nepřicházíme o žádný kořen.

1.4. Řeš v R rovnici: $\cos 4x + \cos 2x = 0$

ŘEŠENÍ:

$$\cos 2y + \cos y = 0$$

$$\cos^2 y - \sin^2 y + \cos y = 0$$

$$\cos^2 y - \left(1 - \cos^2 y\right) + \cos y = 0$$

$$2\cos^2 y + \cos y - 1 = 0$$

$$2k^2 + k - 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \quad k_1 = -1; k_2 = \frac{1}{2}$$

a) $\cos 2x = -1$

$$2x_{1k} = \pi + 2k\pi$$

$$x_{1k} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

b) $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

$$2x_{2k} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x_{2k} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$2x_{3k} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x_{3k} = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$\mathrm{K} = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\}$$

Nenech se nachytat a nepřeváděj funkce vícenásobných argumentů podle vzorců. Daleko jednodušší je využití substituce.

Substituci využijeme dokonce dvakrát. Nezapomeň se pak vrátit k původní neznámé *x*.

Lze také výhodně řešit užitím vztahu

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

dostáváme pak rovnici ve tvaru $2\cos 3x \cdot \cos x = 0$, jejíž další řešení snadno nahlédneš.

1.5. Řeš v R rovnici: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$

ŘEŠENÍ:

$$\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x+\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x=\sin 2x$$

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\sin 2x=0$$

$$\sin 2x\left(\sqrt{2}-1\right)=0$$

$$\sin 2x=0$$

$$x_k=\frac{k\pi}{2}$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$$

Další (méně často používané) vzorce:

$\sin\left(x+y\right)=\sin x\cos x+\sin y\cos x$

$\sin\left(x-y\right)=\sin x\cos x-\sin y\cos x$

$\cos\left(x+y\right)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos\left(x-y\right)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

1.6. Řeš v R rovnici: $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2$

ŘEŠENÍ:

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x=2$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\cos^2 x}=2-\cos x$$

$$3-3\cos^2 x=4-4\cos x+\cos^2 x$$

$$4\cos^2 x-4\cos x+1=0$$

$$\left(2\cos x-1\right)^2=0$$

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

$$x_{1k}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$x_{2k}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$$

Při řešení této rovnice použijeme přece jenom důsledkovou úpravu. Nejprve jednu z funkcí nahradíme odmocninou podle vzorce. Poté si necháme odmocninu na jedné straně rovnice a zbytek převedeme na druhou. Umocníme.

Použití důsledkové úpravy se můžeme vyhnout substitucí $y=\frac{x}{2}$. Dostaneme rovnici: $\cos 2y+\sqrt{3}\sin 2y=2$ a uplatníme vzorce pro funkce dvojnásobného argumentu.

Pozor! Používáme důsledkovou úpravu. Z toho plyne, že zkouška je povinnou součástí řešení. Některý z výsledků může být „falešný“.

Při zkoušce skutečně vyloučíme výsledek $\frac{5\pi}{3}+2k\pi$.

1.7. Řeš v R rovnici: $\cos\frac{x}{2} = -\sin x$

1.8. Řeš v R rovnici: $3\sin(\pi - 2x) = 5\sin 2x - 1$

1.9. Řeš v R rovnici: $2\sin^2 x + 7\cos x = 5$

1.10. Řeš v R rovnici: $\mathrm{tg}\, x - \sin\frac{\pi}{2} = 2\cos\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\, x$

ŘEŠENÍ:

7. $K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\pi + 2k\pi; \frac{7}{3}\pi + 4k\pi; \frac{11}{3}\pi + 4k\pi\right\}$

8. $K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi\right\}$

9. $K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right\}$

10. $K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi\right\}$

Otázky, které mohou padnout při maturitní zkoušce:

1) Jaké vzorce můžeme uplatnit při řešení goniometrických rovnic?
2) Jak se uplatňuje metoda substituce při řešení goniometrických rovnic?
3) Jak zapisujeme výsledek goniometrických rovnic?