INTERNETOVÉ ZKOUŠKY NANEČISTO - VŠE: UKÁZKOVÁ PRÁCE

1. Součin $\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt{32}$ je roven číslu:

a) $2^4\sqrt{2}$, b) 2, c) $\frac{1}{2}$, d) $2^3\sqrt{2}$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

ŘEŠENÍ:

$$\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt{32}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt{2^5}=2^{\frac{2}{6}}\cdot2^{\frac{5}{3}}\cdot2^{\frac{5}{2}}=2^{\frac{2}{6}+\frac{5}{3}+\frac{5}{2}}=2^{\frac{2+10+15}{6}}=$$

$$=2^{\frac{27}{6}}=2^{\frac{9}{2}}=\sqrt{2^9}=\underline{\underline{2^4\sqrt{2}}}$$

Správná odpověď je a)

Počítání s mocninami

Využíváme tato pravidla:

a) $a^s\cdot a^t=a^{s+t}$

b) $\sqrt[t]{a^s}=a^{\frac{s}{t}}$

2. Je dána přímka: $3x-2y+2m=0$. Leží-li na této přímce bod $A[2;1]$, je hodnota parametru m:

a) - 3, b) 2, c) $-\frac{1}{3}$, d) - 2, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

ŘEŠENÍ:

$$3x-2y+2m=0$$
$$3\cdot2-2+2m=0$$
$$2m=-4$$
$$m=-2$$

Správná odpověď je d)

Přímka v analytické geometrii

Souřadnice bodu *A* dosadíme za *x* a *y* a dopočítáme hodnotu parametru *m*.

3. Podíl $\dfrac{\left|3-\sqrt{3}\right|+\sqrt{3}}{\left|\sqrt{3}+3\right|+\left|\sqrt{3}-3\right|}$ je roven: a) $\sqrt{3}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, c) $2\sqrt{3}$, d) $\frac{1}{2}$, e) jiný výsledek.

ŘEŠENÍ:

Platí:

$$3-\sqrt{3}>0\Rightarrow\quad\left|3-\sqrt{3}\right|=3-\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}+3>0\Rightarrow\quad\left|\sqrt{3}+3\right|=\sqrt{3}+3$$
$$\sqrt{3}-3<0\Rightarrow\quad\left|\sqrt{3}-3\right|=-\sqrt{3}+3$$

$$\frac{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3-\sqrt{3}+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Správná odpověď je d)

Počítání s absolutní hodnotou

$$|a|=a\quad\Leftrightarrow\quad a\geq0$$
$$|a|=-a\quad\Leftrightarrow\quad a<0$$

4. Počet všech reálných řešení rovnice $\sin 3x = \frac{1}{2}$ je na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$: a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) jiný výsledek

ŘEŠENÍ:

$\sin 3x = \frac{1}{2}$

a) $3x_{1k} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ a) $3x_{2k} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$x_{1k} = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ $x_{2k} = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

$x_1 = \frac{\pi}{18}; x_2 = \frac{5}{18}\pi; x_3 = \frac{13}{18}\pi; x_4 = \frac{17}{18}\pi; x_5 = \frac{25}{18}\pi; x_4 = \frac{29}{18}\pi$

V zadaném intervalu má rovnice 6 kořenů

Správná odpověď je e)

Goniometrická rovnice

$3x$ můžeme chápat jako nějaké y (substituce). Funkce sinus nabývá hodnoty $\frac{1}{2}$ pro argumenty $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5\pi}{6}$ a správná perioda je 2π.

5. Absolutní hodnota (resp. velikost) komplexního čísla $z = (2i-1)(3i-2)(4i-3)$ je reálné číslo: a) $\sqrt{1\,650}$, b) $65\sqrt{5}$, c) $5\sqrt{65}$, d) 40, e) jiný výsledek.

ŘEŠENÍ:

$z = (2i-1)(3i-2)(4i-3) = (6i^2 - 4i - 3i + 2)(4i-3) = =$

$= (-7i-4)(4i-3) = -28i^2 + 21i - 16i + 12 = 40 + 5i$

$|z| = \sqrt{1\,600 + 25} = \sqrt{1625} = 5\sqrt{65}$

Správná odpověď je c)

Základní výpočty s komplexními čísly

Platí: $i = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ atd.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, pro $z = a + bi$

Výsledek částečně odmocníme.

Postup:

$\sqrt{1625} = \sqrt{25 \cdot 65} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{65} = 5\sqrt{65}$

6. Řešení rovnice: $\log \log_3 x = 1$ náleží intervalu: a) $(-\infty; 3)$, b) $\langle 3; 7)$, c) $\langle 7; 11)$, d) $\langle 50; \infty)$, e) jiný výsledek

ŘEŠENÍ:

$\log \log_3 x = 1$

Substituce: $\log_3 x = y$

$\log_{10} y = 1$

$y = 10^1 = 10$

Zpátky ze substituce:

$\log_3 x = y = 10$

$x = 3^{10}$

Správná odpověď je d)

Logaritmická rovnice

Definice logaritmu:

$\log_a u = v \Leftrightarrow a^v = u$

7. V trojúhelníku ABC platí: $a = 3\sqrt{3};\ b = 3;\ \alpha = \frac{\pi}{3}$. Úhel γ (gama) tohoto trojúhelníku má velikost: a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\pi}{3}$, c) $\frac{\pi}{4}$, d) $\frac{\pi}{6}$, e) žádná z předchozích odpovědí není správná.

ŘEŠENÍ:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \sin\alpha \cdot \frac{b}{a}$$

$$\sin\beta = \sin\frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$$

$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Správná odpověď je a)

Sinová věta

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

8. Všechny kořeny rovnice $\binom{n+1}{n-1} = 5 + 2n$ patří do intervalu: a) $(-4;1)$, b) $\langle 1;3 \rangle$, c) $(3;8)$, d) $\langle 8;12 \rangle$, e) jiný výsledek

ŘEŠENÍ:

$$\binom{n+1}{n-1} = 5 + 2n$$

$$\binom{n+1}{2} = 5 + 2n$$

$$\frac{(n+1)n}{2} = 5 + 2n$$

$$n^2 + n = 10 + 4n$$

$$n^2 - 3n - 10 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} -2 & \text{nelze} \\ 5 & \end{cases}$$

Zkouška:

$$L(5) = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$P(5) = 5 + 10 = 15$$

$$K = \{5\}$$

Správná odpověď je c)

Rovnice s kombinačním číslem

Využijeme pravidlo:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

9. Všechna řešení rovnice $\sqrt{3x+7}=2+\sqrt{x+1}$ patří do intervalu: a) $(-15;-3)$, b) $\langle -3;3\rangle$, c) $(3;15)$, d) $\langle 15;35\rangle$, e) jiný výsledek

ŘEŠENÍ:

$$\sqrt{3x+7}=2+\sqrt{x+1} \qquad /^2$$
$$3x+7=4+4\sqrt{x+1}+x+1$$
$$2x+2=4\sqrt{x+1}$$
$$x+1=2\sqrt{x+1} \quad /^2$$
$$x^2+2x+1=4x+4$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{matrix} \nearrow & -1 \\ \searrow & 3\end{matrix}$$

Zkouška: $L(-1) = 2$; $P(-1) = 2$; $L(3) = 4$; $P(3) = 4$

$$K = \{-1; 3\}$$

Správná odpověď je b)

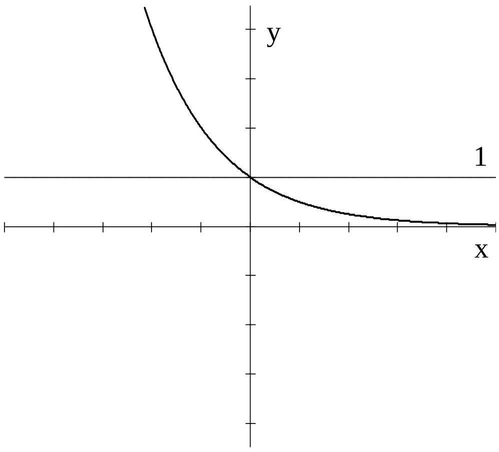
Rovnice s odmocninami

Pozor! V průběhu řešení musíme dvakrát umocňovat. A na závěr je povinná zkouška. To vyplývá z toho, že umocnění rovnice patří mezi důsledkové úpravy.

10. Nerovnice $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}<1$ platí právě pro všechna $x \in R$, pro která

a) $x \in (-\infty; 0)$, b) $x \in (1; \infty)$, c) $x \in R$, d) $x \in (0; \infty)$, e) jiný výsledek

ŘEŠENÍ:



$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}<1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$$

$\underline{x \in (1,\infty)}$

Správná odpověď je b)

Exponenciální funkce

Vycházíme z grafu, který je pro základ v intervalu od nuly do jedné klesající. Funkční hodnoty jsou menší než jedna od bodu nula až do nekonečna.

11. Všechna reálná řešení rovnice $5^{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-12\right)}=\frac{1}{25}$ náleží intervalu: a) $(-15;-8)$, b) $\langle -8;-5\rangle$, c) $(-5;5)$, d) $\langle 5;20\rangle$, e) jiný výsledek

ŘEŠENÍ:

$$5^{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-12\right)}=\frac{1}{25}=5^{-2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-12\right)=-2$$

$$x^2-12=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$$

$$x^2=16$$

$$x=\pm 4$$

Zkouška:

$$L(-4)=5^{\log_{\frac{1}{2}}4}=5^{-2}=\frac{1}{25}=P(-4)$$

$$L(4)=5^{\log_{\frac{1}{2}}4}=5^{-2}=\frac{1}{25}=P(4)$$

Správná odpověď je c)

Exponenciální rovnice

Potřebujeme získat na levé i pravé straně jednu mocninu se stejným základem. Potom porovnáme exponenty.

Dále potřebujeme znát definici logaritmu.

Definice logaritmu:
$\log_a u = v \Leftrightarrow a^v = u$

12. Uvažujme reálnou funkci f jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f(x)=(x+1)^2-x$. Množina všech reálných čísel a, pro která platí $f(a+1)-f(a)<f(2)$, je rovna množině:

a) $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$, b) $\left\langle -\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right\rangle$, c) $\left(\frac{7}{2};\infty\right)$, d) $\left\langle -\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right\rangle$, e) jiný výsledek

ŘEŠENÍ:

$$f(a)=(a+1)^2-a=a^2+a+1$$

$$f(a+1)=\left[(a+1)+1\right]^2-(a+1)=a^2+3a+3$$

$$f(2)=3^2-2=7$$

$$f(a+1)-f(a)<f(2)$$

$$a^2+3a+3-a^2-a-1<7$$

$$2a+2<7$$

$$2a<5$$

$$a<\frac{5}{2}$$

$$a\in\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$$

Správná odpověď je a)

Kvadratická funkce

Místo x dosadíme a a $(a+1)$!

13. Středy kružnic $k_1: x^2+y^2-2x+4y=0$ a k: $k_2: x^2+y^2-10x+2y+1=0$ leží oba:
a) v 1. kvadrantu, b) ve 2. kvadrantu, c) ve 3. kvadrantu, d) ve 4. kvadrantu, e) jiný výsledek

ŘEŠENÍ:

$k_1: x^2+y^2-2x+4y=0$

$k_1: \left(x^2-2x+1\right)-1+\left(y^2+4y+4\right)-4=0$

$k_1: \left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=5$

$S_1\left[1;-2\right]$

$k_2: x^2+y^2-10x+2y+1=0$

$k_2: \left(x^2-10x+25\right)-25+\left(y^2+2y+1\right)-1+1=0$

$k_2: \left(x-5\right)^2+\left(y+1\right)^2=25$

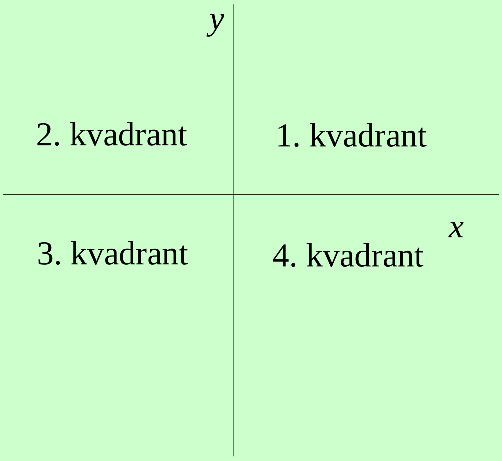
$S_2\left[5;-1\right]$

Oba leží ve 4. kvadrantu.

Správná odpověď je d)

<u>Kružnice a úsečka v analytické geometrii</u>

Rovnici kružnice převedeme na středový tvar.
Určíme souřadnice středu a zakreslíme je do kartézské soustavy os.



14. Počet všech reálných řešení rovnice $2\sin x=\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} x$ je na intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$ roven číslu: a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) nic z předchozího.

ŘEŠENÍ:

$2\sin x=\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} x$

$2\sin x=\sqrt{3}\cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$2\sin x\cdot\cos x=\sqrt{3}\cdot\sin x$

$2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$

$\sin x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$

a) b)

$\sin x=0$ $\qquad \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

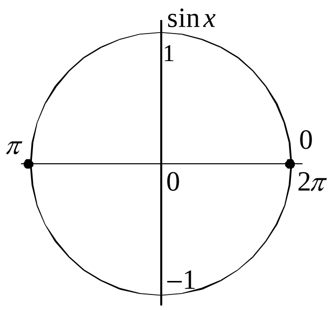
$x_{1k}=k\pi$ $\qquad x_{2k}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$

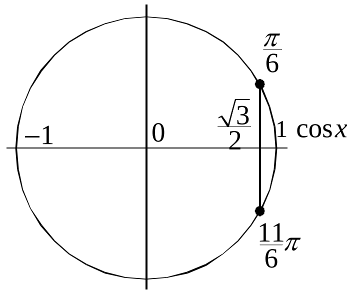
$x_{3k}=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$

$x_1=0;\ x_2=\dfrac{\pi}{6};x_3=\pi;x_4=\dfrac{11\pi}{6};x_5=2\pi$

Na intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$ je 5 kořenů.

Správná odpověď je d)





<u>Goniometrická rovnice</u>

Vytvoříme výhodný součinový tvar s nulou na pravé straně.

Pozor! Nesmíme zapomenout na kořeny
0 a 2π. Oba patří do zadaného intervalu.

15. Všechna reálná řešení rovnice $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-1}=\left(\frac{1}{49}\right)^{x+3}$ náleží intervalu: a) $(-10;-5)$, b) $\langle -5;-1\rangle$, c) $(-1;0)$, d) $\langle 0;1\rangle$, e) jiný výsledek

ŘEŠENÍ:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-1}=\left(\frac{1}{49}\right)^{x+3}$$
$$\left(7^{-1}\right)^{3x-1}=\left(7^{-2}\right)^{x+3}$$
$$7^{1-3x}=7^{-2x-6}$$
$$1-3x=-2x-6$$
$$-x=-7$$
$$x=7$$

Zkouška:

$$L(7)=\left(\frac{1}{7}\right)^{20}=7^{-20}$$
$$P(7)=\left(7^{-2}\right)^{10}=7^{-20}$$

Správná odpověď je e)

Exponenciální rovnice

Potřebujeme získat na levé i pravé straně jednu mocninu se stejným základem. Potom porovnáme exponenty.

STRATEGIE PRO PSANÍ PÍSEMEK Z MATEMATIKY:

1. **Nejdříve řeším ty příklady, které jasně umím**
2. **Mám-li problém a dost nevyřešených příkladů, přeskočím na jiný výpočet**
3. **Vše po sobě kontroluji a překontrolované úlohy si odškrtnu**
4. **Hlídám si čas a snažím se vytvořit i časovou rezervu**
5. **Počítám trpělivě, pečlivě a pozorně**
6. **Mám-li čas, dělám u všech rovnic zkoušky dosazením**
7. **Dávám si pozor na chytáky a chytáčky**